

UNIVERSIDAD CATÓLICA DE TEMUCO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPTO. DE CS. MATEMÁTICAS Y FÍSICAS

Asignatura : Ecuaciones Diferenciales, EIP-1130.

Profesor : Dr. Emilio Cariaga.

Periodo : 1er. Semestre 2012.

GUÍA DE EJERCICIOS. MODELOS de ORDEN 1.

1. Verifique por sustitución que la función dada es una solución de la edo dada.

1. $y' + 2y = 0; y := 3e^{-2x}.$
2. $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0; y_1 := \frac{1}{x^2}, y_2 := \frac{\ln x}{x^2}.$
3. $x^2y'' - xy' + 2y = 0; y_1 := x\cos(\ln x), y_2 := x\sin(\ln x).$

2. Determine el valor constante real c , tal que la función $y = f(x)$ dada, sea solución de la edo dada.

1. $y' = 2y; y = ce^{2x}, f(0) = 3.$
2. $xy' - 3y = x^3; y = x^3(c + \ln x), f(1) = 17.$
3. $y' + y\tan x = \cos x; y = (x + c)\cos x, f(\pi) = 0.$

3. Se describe una función $y = g(x)$ mediante alguna propiedad geométrica de su gráfica. Escriba una edo de la forma $y' = f(x, y)$ tal que una de sus soluciones sea $g(x)$.

1. La pendiente de la gráfica de g en el punto (x, y) es la suma de x e y .
2. La recta tangente a la gráfica de g en el punto (x, y) corta el eje de las x en el punto $(\frac{x}{2}, 0)$.
3. Toda línea recta perpendicular a la gráfica de g pasa por el punto $(0, 1)$.

4. Escriba una edo que sea un modelo matemático de la situación descrita.

1. La tasa de cambio de una población P con respecto al tiempo t es proporcional a la raíz cuadrada de P .
2. La tasa de cambio con respecto al tiempo de la velocidad v de un bote costero de motor es proporcional al cuadrado de v .
3. En una ciudad con población fija de P personas, la tasa de cambio con respecto al tiempo del número N de personas que han contraído cierta enfermedad es proporcional al producto del número de personas enfermas y el número de las que no lo están.

5. Resuelva el PVI dado por integración directa.

1. $y' = xe^{-x}$; $y(0) = 1$.
2. $y' = (1 - x^2)^{-1/2}$; $y(0) = 0$.
3. $y' = \cos 2x$; $y(0) = 1$.

6. Determine la solución general (en forma implícita y/o explícita) de la edo dada, por separación de variables.

1. $y' + 2xy = 0$.
2. $y' + 2xy^2 = 0$.
3. $y' = y \operatorname{sen} x$.
4. $(1 + x)y' = 4y$.
5. $2\sqrt{xy'} = \sqrt{1 - y^2}$.
6. $x^2y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2$.
7. $y' = 1 + x + y + xy$.
8. $(x^2 + 1)y'tan y = x$.
9. $y' = \frac{(x-1)y^5}{x^2(2y^3-y)}$.
10. $y' = \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{y}}$.
11. $(e^x + e^{-x})y' = y^2$.
12. $y' = x\sqrt{1 - y^2}$.
13. $y' = \frac{xy+2y-x-2}{xy-3y+x-3}$.
14. $y' = \frac{xy+3x-y-3}{xy-2x+4y-8}$.
15. $x(1+y^2)^{1/2}dx = y(1+x^2)^{1/2}dy$.
16. $(e^y+1)^2e^{-y}dx + (e^x+1)^3e^{-x}dy = 0$.
17. $N' + N = Nte^{t+2}$.

7. Resuelva el PVI dado, por separación de variables.

1. $y' = ye^x$, $f(0) = 2e$.
2. $y' = 2xy^2 + 3x^2y^2$, $f(1) = -1$.

3. $xy' - y = 2x^2y$, $f(1) = 1$.
4. $y'tanx = y$, $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$.
5. $2yy' = x(x^2 - 16)^{-1/2}$, $f(5) = 2$.

8. Resuelva la edo lineal de 1er. orden dada.

- | | |
|--|---|
| 1. $y' + y = 2$, $f(0) = 0$. | 7. $Li' + Ri = E$, $i(0) = i_0$. |
| 2. $y' - 2y = 3e^{2x}$, $f(0) = 0$. | 8. $T' = k(T - T_m)$, $T(0) = T_0$. |
| 3. $(x^2 + 1)y' + 3x^3y = 6xe^{-3x^2/2}$,
$f(0) = 1$. | 9. $r' + r \sec \theta = \cos \theta$. |
| 4. $(x^2 + 4)y' + 3xy = x$, $f(0) = 1$. | 10. $yx' - x = 2y^2$, $y(1) = 5$. |
| 5. $xy' = 3y + x^4 \cos x$, $f(2\pi) = 0$. | 11. $P' + 2tP = P + 4t - 2$. |
| 6. $(1+x)y' + y = \cos x$, $f(0) = 1$. | 12. $(x^2 - 1)y' + 2y = (x + 1)^2$. |
| | 13. $y' \cos x + y \sin x = 1$. |

9. Resuelva la edo dada utilizando una sustitución adecuada.

- | | |
|---|--|
| 1. $(x + y)y' = x - y$. | 12. $y' = \frac{3x+2y}{3x+2y+2}$, $y(-1) = -1$. |
| 2. $2xyy' = x^2 + 2y^2$. | 13. $y' = \tan^2(x + y)$. |
| 3. $(x + e^y)y' = xe^{-y} - 1$. | 14. $y' = (x + y + 1)^2$. |
| 4. $(2x \operatorname{sen} y \cos y)y' = 4x^2 + 3 \operatorname{sen}^2 y$. | 15. $y' = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$. |
| 5. $y^2(xy' + y)(1 + x^4)^{1/2} = x$. | 16. $y' = \cos(x + y)$, $y(0) = \pi/4$. |
| 6. $y' = (4x + y)^2$. | 17. $-ydx + (x + \sqrt{xy})dy = 0$. |
| 7. $xy' + y = y^{-2}$. | 18. $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$. |
| 8. $3(1 + t^2)y' = 2ty(y^3 - 1)$. | 19. $ydx + x(\ln x - \ln y - 1)dy = 0$, $y(1) = e$. |
| 9. $y^{1/2}y' + y^{3/2} = 1$, $y(0) = 4$. | 20. $(x + ye^{y/x})dx - xe^{y/x}dy = 0$, $y(1) = 0$. |
| 10. $y' = (1 - x - y)/(x + y)$. | |
| 11. $y' = \sin(x + y)$. | |

10. ...un poco más sobre sustitución.

1. Demuestre que la sustitución $v = ax + by + c$ transforma la edo $y' = F(ax + by + c)$ en una ecuación separable.
2. Demuestre que la sustitución $v = y^{1-n}$ transforma la ecuación de Bernoulli $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ en la ecuación lineal $v' + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x)$, con $n \neq 0, 1$.

3. Demuestre que la sustitución $v = \ln y$ transforma la edo $y' + P(x)y = Q(x)y\ln y$ en la edo $v' + P = Qv$.
4. Use el método del ejercicio anterior para resolver la edo $xy' - 4x^2y + 2y\ln y = 0$.
5. Resuelva la ecuación $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y-1}{x+y+3}$. Ayuda: determine h y k tales que la sustitución $x = u + h$, $y = v + k$ la transforme en $\frac{dv}{du} = \frac{u-v}{u+v}$.
6. Demuestre que las curvas solución de la ecuación homogénea $\frac{dy}{dx} = -\frac{y(2x^3-y^3)}{x(2y^3-x^3)}$ son de la forma $x^3 + y^3 = 3Cxy$.

11. Verifique que la edo dada es exacta. Luego resuelva.

1. $(2x + 3y)dx + (3x + 2y)dy = 0$.
2. $(4x - y)dx + (6y - x)dy = 0$.
3. $(3x^2 + 2y^2)dx + (4xy + 6y^2)dy = 0$.
4. $(2xy^2 + 3x^2)dx + (2x^2y + 4y^3)dy = 0$.
5. $(x^3 + \frac{y}{x})dx + (y^2 + \ln x)dy = 0$.
6. $(1 + ye^{xy})dx + (2y + xe^{xy})dy = 0$.
7. $(\cos x + \ln y)dx + (\frac{x}{y} + e^y)dy = 0$.
8. $(x + \arctan y)dx + \frac{x+y}{1+y^2}dy = 0$.
9. $(3x^2y^3 + y^4)dx + (3x^3y^2 + y^4 + 4xy^3)dy = 0$.
10. $(e^x \operatorname{sen} y + \tan y)dx + (e^x \cos y + x \sec^2 y)dy = 0$.
11. $(\frac{2x}{y} - \frac{3y^2}{x^4})dx + (\frac{2y}{x^3} - \frac{x^2}{y^2} + \frac{1}{\sqrt{y}})dy = 0$.
12. $\frac{2x^{5/2} - 3y^{5/3}}{2x^{5/2}y^{2/3}}dx + \frac{3y^{5/3} - 2x^{5/2}}{3x^{3/2}y^{5/3}}dy = 0$.

12. Varios

1. Función Integral Seno (FIS). La FIS se define por medio de $Si(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$, en donde el integrando se define como 1 en $t = 0$. Exprese la solución $y(x)$ del pvi: $x^3y' + 2x^2y = 10 \sin x$, $y(1) = 0$, en términos de $Si(x)$.
 2. Función Seno de Fresnel (FSF). La FSF se define por medio de $S(x) := \int_0^x \sin(\frac{\pi}{2}t^2)dt$. Exprese la solución $y(x)$ del pvi: $y' - y \sin x^2 = 0$, $y(0) = 5$, en términos de $S(x)$.
-